**Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasia ASIA (JITIKA)**
Vol.9, No.2, Agustus 2015
ISSN: 0852-730X

# Analisis Dinamik Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Holling Tipe II

**Siti Nurul Afiyah**
STMIK Asia Malang
noeroel_afy@yahoo.com

**ABSTRAK.** Pada Artikel ini dibahas analisis dinamik model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II. Model tersebut akan dianalisis sehingga diperoleh jenis kestabilan lokal titik kesetimbangan model. Model tersebut memiliki empat titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan kepunahan prey, titik kesetimbangan kepunahan predator dan titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan kepunahan predator bersifat tak stabil. Sedangkan titik kesetimbangan kepunahan prey stabil dengan syarat tertentu.

***Kata Kunci:*** *Analisis Dinamik Kontinu, Model Predator-Prey Leslie-Gower, Fungsi Respon Holling Tipe II*

## 1. PENDAHULUAN

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan, dan jika berdampak positif bagi spesies yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan mangsa-pemangsa (*prey-predator*).

Model matematika sering digunakan untuk menjelaskan fenomena-fenomena alam yang terjadi di sekitar manusia. Salah satu model yang dikaji dan diteliti adalah interaksi antar spesies yang hidup pada suatu ekosistem yang disebut dengan model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra yang sering diteliti diantaranya adalah model interaksi antara *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model Lotka-Volterra pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926. Penelitian Lotka-Volterra menghasilkan model sederhana pemangsaan atau interaksi antar dua spesies dalam suatu ekosistem dan selanjutnya juga mengenalkan model Lotka-Volterra klasik yang akhir-akhir ini banyak dikembangkan oleh para peneliti (Murray, 2002).

## 2. MODEL MATEMATIKA

Jika kita misalkan $x(t)$ merupakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ merupakan kepadatan populasi *predator,* maka model Lotka-Volterra klasik diberikan oleh sistem berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (r_1 - c_1 y - b_1 x)x \\ \frac{dy}{dt} = (-\varepsilon_2 + \rho_2 x)y \end{cases} \tag{2.1}$$

dimana semua parameternya bernilai positif. Pada model tersebut diketahui bahwa pertumbuhan predator tidak terbatas, tentunya hal ini tidak sesuai dengan kenyataan.

Pada tahun 1948, Leslie dan Gower memperkenalkan model dengan populasi predator tumbuh mengikuti model logistik sehingga pertumbuhannya terbatas. Selain itu, laju pertumbuhan predator sebanding dengan banyaknya populasi prey.

Sehingga, jika kita notasikan $x(t)$ sebagai kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ merupakan kepadatan populasi *predator* maka model Leslie-Gower diberikan pada sistem persamaan differensial berikut ini:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (r_1 - c_1 y - b_1 x)x \\ \frac{dy}{dt} = \left(r_2 - c_2 \frac{y}{x}\right) y \end{cases} \tag{2.2}$$

dimana semua parameter bernilai positif. Pada persamaan kedua model diatas memuat bentuk Leslie-Gower yaitu $c_2 \frac{y}{x}$. Bentuk ini didasarkan pada misalkan $x \to \infty$ maka pertumbuhan predator akan maksimum $\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \to r_2\right)$. Begitu juga sebaliknya jika populasi prey menuju nol ($x \to 0$) maka $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \to -\infty$, sehingga predator akan punah. Interpretasi dari model Leslie-Gower bahwa *Carrying capacity* pada lingkungan predator sebanding dengan banyaknya prey yaitu,

$$\frac{dy}{dt} = r_2\left(1 - \frac{y}{Ax}\right)y = r_2\left(1 - \frac{y}{C}\right)y$$

dimana $A = \frac{c_2}{r_2}$ yang diinterpretasikan sebagai faktor perubahan prey predator dan $C = Ax$ sebagai carrying capacity predator ( sebanding dengan banyaknya prey). Bentuk Leslie-Gower $\frac{y}{Ax}$ diinterpretasikan sebagai ukuran hilangnya populasi predator karena kelangkaan makanan favoritnya (prey $x$). Kelangkaan prey bisa merangsang predator untuk mengganti dengan sumber makanan alternatif lainnya. Kemungkinannya bahwa predator tidak bergantung pada prey tunggal yang dimodelkan disini dengan menambahkan konstan positif $d$ pada pembaginya. Sehingga menjadi,

$$\frac{dy}{dt} = r_2\left(1 - \frac{y}{\alpha x + d}\right)y$$

Alaoui dan Aziz pada tahun 2003 mengkaji model Leslie-Gower dua dimensi dengan mengasumsikan fungsi respon yang menyatakan besarnya pemangsaan predator terhadap prey mengikuti fungsi respon Holling tipe II. Alaoui dan Aziz mengkaji keterbatasan solusi, eksistensi invarian positif, dan kestabilan global titik kesetimbangan koeksis model dengan mengkontruksi fungsi Lyapunov. Selanjutnya, banyak peneliti yang meneliti tentang modifikasi Leslie-Gower ini ditambahi dengan waktu tunda seperti halnya penelitian Nindjin, Alaoui dan Cadivel pada tahun 2006, ada juga yang menambahkan dengan adanya kontrol impulsif seperti halnya penelitian Guo dan Song tahun 2006, dan banyak lagi yang lainnya. Pada tahun 2012 Shengbin Yun memperbaharui hasil dari penelitian Alaoui dan Aziz, karena pada penelitian Alaoui dan Aziz ada beberapa kondisi yang kurang tepat. Artikel ini didasarkan pada penelitian Yu(2012).

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini merupakan model Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II:

$$\frac{dx}{dt} = \left(r_1 - b_1 x - \frac{a_1 y}{x + k_1}\right)x \qquad (3.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(r_2 - \frac{a_2 y}{x + k_2}\right)y$$

Di sini, $x(t)$ merupakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ merupakan kepadatan populasi *predator*. Semua parameter diasumsikan bernilai positif. Parameter $r_1$ dan $r_2$ berturut-turut menunjukkan pertumbuhan intrinsik *prey* dan *predator*. Parameter $a_1$ merupakan parameter interaksi pemangsaan *predator* terhadap *prey*. Parameter $b_1$ adalah parameter interaksi antar *prey*, sedangkan $a_2$ adalah parameter interaksi antar *predator*. Parameter $k_1$ merupakan parameter perlindungan *prey* dari *predator* oleh lingkungan, dan parameter $k_2$ adalah parameter perlindungan terhadap *predator*.

### 3.1 Titik Kesetimbangan

Sistem tersebut memiliki 4 titik kesetimbangan, yaitu $E_0(0,0)$, $E_1(\frac{r_1}{b_1}, 0)$, $E_2(0, \frac{r_2 k_2}{a_2})$, dan $E^*(x^*, y^*)$. Untuk titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$ terdapat beberapa kasus berikut.

a. Kasus 1. Jika salah satu kondisi di bawah ini terpenuhi
   i. $a_1 r_2 k_2 < a_2 r_1 k_1$,
   ii. $a_1 r_2 k_2 = a_2 r_1 k_1$ dan $a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1 < 0$,
   iii. $a_1 r_2 k_2 > a_2 r_1 k_1$, $a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1 < 0$ dan $(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1)^2 - 4a_2 b_1(a_1 r_2 k_2 - a_2 r_1 k_1) = 0$,

   Maka sistem (3.1) mempunyai titik kesetimbangan positif tunggal $E_{3,1} = (x_{3,1}, y_{3,1})$, dengan $x_{3,1} = \frac{-(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1) + \sqrt{(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1)^2 - 4a_2 b_1(a_1 r_2 k_2 - a_2 r_1 k_1)}}{2a_2 b_1}$
   dan $y_{3,1} = r_2(x_{3,1} + k_2)/a_2$.

b. Kasus 2. Jika $a_1 r_2 k_2 > a_2 r_1 k_1$, $a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1 < 0$ dan $(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1)^2 - 4a_2 b_1(a_1 r_2 k_2 - a_2 r_1 k_1) > 0$, maka (3.1) mempunyai dua titik kesetimbangan positif $E_{3,\pm} = (x_{3,\pm}, y_{3,\pm})$ dimana $x_{3,\pm} = \frac{-(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1) \pm \sqrt{(a_1 r_2 - a_2 r_1 + a_2 b_1 k_1)^2 - 4a_2 b_1(a_1 r_2 k_2 - a_2 r_1 k_1)}}{2a_2 b_1}$ dan $y_{3,\pm} = r_2(x_{3,\pm} + k_2)/a_2$.

c. Kasus 3. Jika kondisi-kondisi pada kasus 1 dan 2 tidak terpenuhi, maka sistem (3.1) tidak mempunyai titik kesetimbangan positif.

### 3.2 Analisis Kestabilan

Jenis kestabilan keempat titik kesetimbangan adalah

a) $E_0(0,0)$ tak stabil.
b) $E_1(\frac{r_1}{b_1},0)$ tak stabil pelana.
c) $E_2(0,\frac{r_2k_2}{a_2})$ akan stabil jika $a_1r_2k_2 > a_2r_1k_1$ dan akan tidak stabil jika $a_1r_2k_2 < a_2r_1k_1$
d) $E_{3,1}$ pada kasus 1(i) dan (ii) stabil jika $2b_1{x_{3,1}}^2 - (r_1 - r_2 - b_1k_1)x_{3,1} + k_1r_2 > 0$, $E_{3,-}$ tak stabil dan $E_{3,+}$ stabil jika $2b_1{x_{3,+}}^2 - (r_1 - r_2 - b_1k_1)x_{3,+} + k_1r_2 > 0$.

## 4. KESIMPULAN

Model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II memiliki empat titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan kepunahan prey, titik kesetimbangan kepunahan predator dan titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan kepunahan predator bersifat tak stabil. Sedangkan titik kesetimbangan kepunahan prey stabil dengan syarat tertentu. Titik kesetimbangan interior bersifat stabil untuk kasus (i) dan (ii).

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Aziz-Alaoui, M.A. dan M.D. Okiye. 2003. Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II. *Applied Math*.Vol. 16, hal. 1069-1075.

[2] Guo, H. dan X. Song. 2006. An Impulsive Predator-Prey System with Modified Leslie-Gower and Holling Type II Schemes. *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol. 36, no. 5, hal. 1320–1331.

[3] Leslie, P.H. 1948. Some Further Notes on The Use of Matrices in Population Mathematics. *Bometrika*. Vol.35, hal. 213-245.

[4] Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg.

[5] Nindjin, A.F., M.Aziz-Alaoui, dan M. Cadivel. 2006. Analysis of a predator–prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes with time delay. *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*. Vol.7, hal. 1104 – 1118.

[6] Yu, S. 2012. Global Asymptotic Stability of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society*. Vol. 2012 ID 208167.